

NUMERISCHE KORREKTUR VON ZAHNRÄDERN

Besser und schneller fertigen

Beim Präzisionsschmieden von Zahnrädern kommt es aus technologischen Gründen zu einer ungleichmäßigen Verteilung des Bearbeitungsaufmaßes. Um die Qualität der Zahnräder zu sichern und den Verschleiß des Schleifwerkzeugs zu mindern, wird eine numerische Korrektur durchgeführt. Damit lassen sich die Funktionselemente für den Stirnschnitt eines präzisionsgeschmiedeten Zahnrades eindeutig lokalisieren. So kann der Prozess der Feinbearbeitung optimiert werden.

Rainer Haase, Hannover

Zur Übertragung und Wandlung von Drehzahl und Drehmoment sind im Maschinenbau Zahnradgetriebe weit verbreitet. Am häufigsten kommen dabei gerad- und schrägverzahnte Zylinderräder zum Einsatz. Je nach Anwendung werden an diese Stirnräder besondere Anforderungen bezüglich ihrer Lebensdauer, Festigkeit und Genauigkeit gestellt. Insbesondere Hochleistungsbauteile wie z. B. in Pkw-Getrieben müssen präzise gefertigt werden.

Bisher werden Stirnräder durch rein spanende Bearbeitung hergestellt. Dabei wird zunächst ein Rohzylinder mit einer Bohrung versehen, die in den folgenden Bearbeitungsschritten als Referenz dient. Es schließen sich die Vorverzahnung z. B. mittels eines Protuberanzfräasers und die Fertigverzahnung z. B. durch kontinuierliches Wälzschleifen an.

Da es sich bei der Vorverzahnung mittels Protuberanzfräser um eine spanende Bearbeitung mit nur einer Schneidkante handelt, ist sichergestellt, dass alle Zähne das exakt gleiche Bearbeitungsaufmaß für das Fertigverzahnen aufweisen. Insbesondere in der Massenfertigung von Zahnrädern wie z. B. im Kfz-Bereich erweist sich dieses Verfahren allerdings

wegen seiner großen Bearbeitungsdauer als nachteilig.

Abhilfe schafft hier das Präzisionsschmieden von Zahnrädern in einem geschlossenen Gesenk. Die umformende Bearbeitung läuft dabei erheblich schneller ab als die spanende Bearbeitung. Bedingt durch die Prozesstechnologie des Schmiedens können allerdings insbesondere wegen des ungleichmäßigen Gesenkverschleißes und der inhomogenen Schrumpfung während der Abkühlung des Schmiedeteils die Lage der Bohrung und die Zahndicken der einzelnen Zähne variieren. Wird nun ohne jegliche Korrektur das geschmiedete Zahnrad in der Bohrung aufgespannt, ist eine ungleichmäßige Verteilung des Bearbeitungsaufmaßes bezogen auf die Verzahnung die Folge [2].

Liegt eine ungleichmäßige Aufmaßverteilung an den Zahnflanken einer Zahnücke vor, wird die schmale profilierte Schleifscheibe durch an ihrem Rand eingeleitete unzulässige seitliche Kräfte verformt (Bild 1). Eine sichere Prozessführung und die damit korrelierte Qualität der Zahnräder können so nicht gewährleistet werden. Die übermäßige Beanspruchung des Werkzeugs führt zu grö-

ßerem Verschleiß und vorzeitigem Ausfall [2].

Der Lösungsansatz

Eine gleichmäßige Verteilung des Bearbeitungsaufmaßes abbildend, d. h. urformend oder umformend, hergestellter Zahnräder soll durch eine numerische Korrektur sichergestellt werden. Dazu werden ideale Funktionselemente in die real gemessene Kontur des vorverzahnten Zahnrades numerisch eingepasst.

Als Funktionselemente werden dabei zwei sich gegenüberliegende Funktionsflächen (hier Evolventen) bezeichnet. Bei Gerad- oder Schrägstirnrädern mit Evolventen-Verzahnung erstreckt sich die Funktionsfläche, d. h. der nutzbare Teil der Evolvente, vom Fußformkreis mit dem Radius r_{FF} bis zum Kopfkreis mit dem Radius r_a . Der Zahngrund zwischen dem Fußkreis mit dem Radius r_f und dem Fußformkreis ist wegen des u. U. auftretenden Hinterschnittes nicht nutzbar (Bild 2) [3, 8].

Je nach Wahl der sich gegenüberliegenden Funktionsflächen beschreibt ein Funktionselement entweder einen Zahn oder eine Zahnücke. Die Wahl von ▷

Nutzen des Verfahrens

Das Verfahren der numerischen Korrektur von Zahnrad-Funktionselementen ist in der Qualitätssicherung von abbildenden (urformenden bzw. umformenden) Prozessen und der sich anschließenden Feinbearbeitung einsetzbar.

Zum einen kann der Prozess-Ingenieur anhand der ermittelten Parameter die Feinbearbeitung im Sinne einer Qualitätssteuerung optimieren. Damit wird Qualität bereits von Beginn an gefertigt und nicht erst am Ende geprüft.

Zum anderen kann der QS-Ingenieur basierend auf denselben Parametern eine Qualitätsregelkarte (QRK) des abbildenden Prozesses erstellen. Eine mittels QRK leicht festzustellende Parameteränderung identifiziert dann beispielsweise den kritischen Verschleiß des im abbildenden Prozess verwendeten Werkzeugs oder einzelner Werkzeugteile. Diese können im Rahmen von präventiver Wartung bzw. ergebnisorientierter Wartung schon vor ihrem Ausfall rechtzeitig ersetzt werden.

Autor

Dipl.-Ing. Rainer Haase, geb. 1978, arbeitet seit 2002 in der Arbeitsgruppe Fertigungsmess- und Prüftechnik am Institut für Mess- und Regelungstechnik der Universität Hannover.

Kontakt

rainer.haase@imr.uni-hannover.de

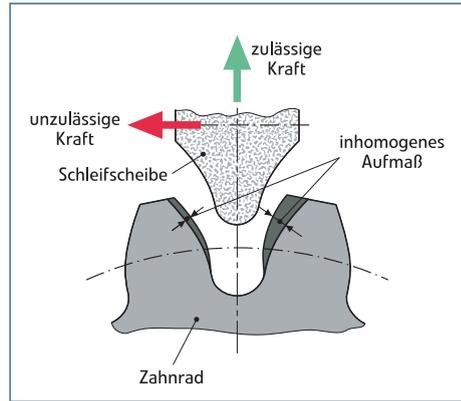


Bild 1. Kräfte beim Schleifen nach [2]

Zahn oder Zahnücke ist dabei abhängig vom Prozess des Fertigverzahnens und der dabei eingesetzten Technologie. Um den Bereich mit Materialabtrag als Funktionselement zu betrachten, muss beispielsweise bei Außenrädern die Zahnücke, bei Hohlrädern jedoch der Zahn gewählt werden.

Das hier erstmals vorgestellte numerische Einpassen der Funktionselemente folgt dem Bestfit-Problem mit nachstehend genannten unterschiedlichen Optimierungskriterien. Das Bestfit-Problem hat seinen Ursprung in der Koordinatenmesstechnik. Dabei wird eine ideale Geometrie in eine Messpunktewolke eingepasst, um so Aussagen über das vermessene Objekt treffen zu können. Es existiert eine Vielzahl an Veröffentlichungen zu 2D-(Gerade, Kreis) und 3D-Problemen (Gerade, Kreis, Ebene, Kugel, Zylinder, Kegel, Torus) [1, 10]. In der Literatur werden dabei die Ausgleichskreise in 2D wohl am häufigsten beschrieben [4, 5, 9].

Die Ausgleichskreise

Die unterschiedlichen Optimierungskriterien, die beim numerischen Einpassen der Funktionselemente zur Anwendung kommen, werden am Beispiel der bekannten und sehr anschaulichen Ausgleichskreise vorgestellt.

Die Berechnung von Ausgleichskreisen lässt sich immer auf die Minimierung der Zielfunktion $Q(a)$ in Abhängigkeit der (Kreis-) Parameter a (Mittelpunktskoordinaten und ggf. Radius) zurückführen. Für dieses Problem sind geeignete Lösungsansätze bekannt [1]. Damit können die fünf wesentlichen Ausgleichskreise LSC, LIC, MZC, MCC und MIC berechnet werden (Bild 3).

Für den LSC, LIC und MZC werden die Abstände d_i der Messpunkte $p_i = [x_i, y_i]$ zum Ausgleichskreis mit dem Parameter $a = [x_M, y_M, r]$ betrachtet. Damit ergeben sich die folgenden Zielfunktionen:

LSC (Least Square Circle – Gauß-Kreis)

$$Q(a) = \sum_i d_i^2 \xrightarrow{!} \min_a$$

LIC (L1 Circle – Betrags-Kreis)

$$Q(a) = \sum_i |d_i| \xrightarrow{!} \min_a$$

MZC (Minimum Zone Circle – Tschebyscheff-Kreis)

$$Q(a) = \max_i |d_i| \xrightarrow{!} \min_a$$

Für den LSC und LIC ergeben sich daraus direkt die Radien der Ausgleichskreise. Im Falle des MZC wird der mittlere Radius r der minimalen Kreisringzone berechnet, die durch den äußeren Radius R_+ und den inneren Radius R_- begrenzt wird.

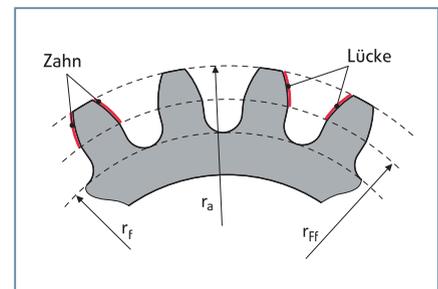


Bild 2. Funktionselemente am Zahnrad

Demgegenüber werden für den MCC und den MIC die Radien r_i eines möglichen Ausgleichskreises durch die Messpunkte p_i betrachtet. Dieser Ausgleichskreis ist damit durch den Parameter $a = [x_M, y_M]$ und den minimalen (für den MCC) bzw. maximalen (für den MIC) Radius $r = \pm Q(a)$ definiert. Damit ergeben sich die folgenden Zielfunktionen:

MCC (Minimum Circumscribed Circle – Hüllkreis)

$$Q(a) = \max_i (r_i) \xrightarrow{!} \min_a$$

MIC (Maximum Inscribed Circle – Pferchkreis)

$$Q(a) = \max_i (-r_i) \xrightarrow{!} \min_a$$

Abschätzung der Funktionselemente

Die Funktionselemente (Zahn, Zahn-
 lücke) lassen sich im 2D-Fall (Stirnschnitt
 eines Zahnrads) durch explizite Funktio-
 nen $y = f(x)$ wie z. B. Polynome beschrei-
 ben, deren Koeffizienten dabei frei wähl-
 bar sind. Die optimalen Koeffizienten er-
 geben sich aus der Regression des Ab-
 standes d der Funktion zum idealen
 Funktionselement.

Dabei kann der Abstand als Abstand in
 y -Richtung d_y oder als zur Funktion lot-
 rechter Abstand d_L aufgefasst werden
 (Bild 4).

In der Koordinatenmesstechnik sind
 im 2D-Fall beide Messgrößen, d. h. die
 Koordinaten x_i und y_i der Messpunkte,
 mit dem gleichen Fehler behaftet. Wegen
 der Richtungsunabhängigkeit möglicher
 Formabweichungen darf sich keine Vor-

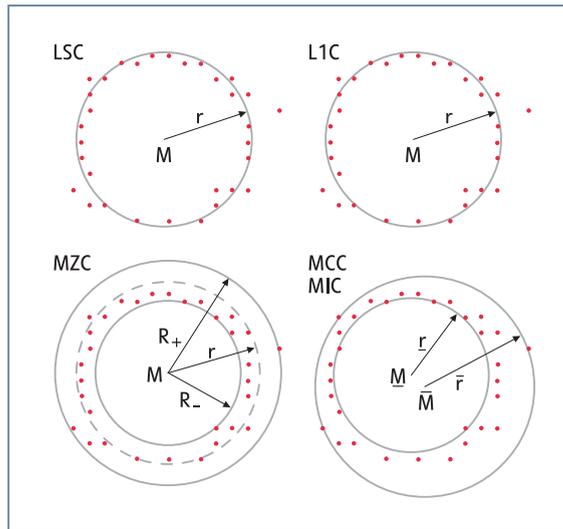


Bild 3. Ausgleichskreise

zugsrichtung (z. B. durch eindimensionale
 Regression nur in y -Richtung) ausbil-
 den. Daher kommt hier die Regression des
 lotrechten (auch Euklid'schen) Abstandes
 d_L zum Einsatz.

Eine explizite Funktion $y = f(x)$ kann
 einfach in eine implizite Funktion

$F(x,y) = 0$ zur Beschreibung eines Funk-
 tionselements überführt werden. Für impli-
 zite Funktionen wird der Abstand eines
 Messpunkts p_i im Prinzip durch ein-
 faches Einsetzen in die Funktionsgleichung
 berechnet (siehe dazu [7, 10]). Weiterhin
 kann auch die mathema- \triangleright

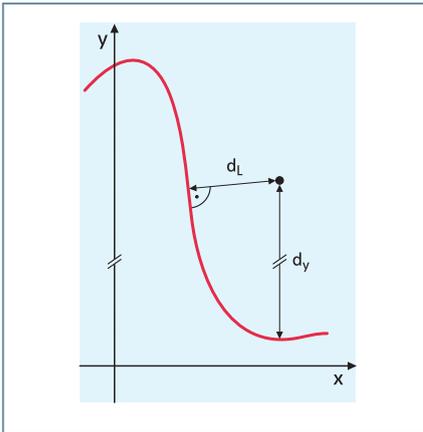


Bild 4. Abstand zur Funktion

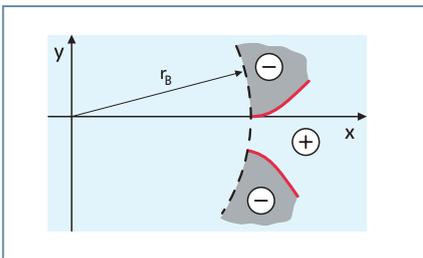


Bild 5. Abstand zur Evolvente

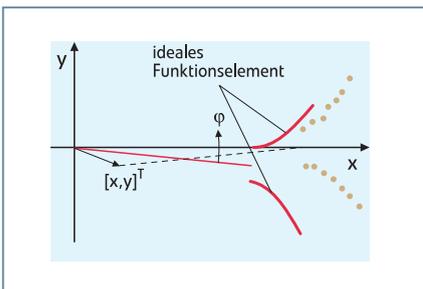


Bild 6. Ideales Funktionselement einpassen

tische Darstellung einer Evolvente in Parameterform erschlossen werden.

Exakte Funktionselemente

Die Berechnung des Abstands eines Punktes von einer Evolvente ist in [6] ausführlich beschrieben. Entscheidend ist in jedem Fall die Berücksichtigung des Vorzeichens des Abstands, d.h. der Richtungsinformation. Messpunkte „unterhalb“ einer Evolventen haben ein negatives, Messpunkte „oberhalb“ einer Evolventen ein positives Vorzeichen (Bild 5).

Da ein Funktionselement aus jeweils zwei sich gegenüberliegenden Funktionsflächen, d. h. Evolventen, besteht, besitzt jeder Messpunkt zunächst auch zwei Abstände – nämlich einen zu jeder der beiden Evolventen. Abhilfe schafft hier die Annahme, dass der jeweils betragsmäßig kleinere der beiden Abstände jedes Messpunkts der tatsächlich gesuchte Ab-

stand ist. Alternativ kann auch jeder Messpunkt mit einer zusätzlichen Information versehen werden, die ihn einer der beiden Flanken zuordnet. Damit wird für jeden Messpunkt p_i jeweils nur der lotrechte Abstand $d_{L,i}$ zu der ihm zugeordneten Evolvente berechnet.

Berechnung der Ersatzelemente

Für jedes vermessene Funktionselement, repräsentiert durch die Messpunkte p_i , kann mit Hilfe des lotrechten Abstandes $d_{L,i}$ durch Lösen einer Optimierungsaufgabe ein Ersatzelement bestimmt werden. Geometrisch anschaulich bedeutet dies, dass ein ideales Funktionselement (das spätere Ersatzelement) erst um den Winkel ϕ gedreht und dann um den Vektor $[x,y]$ verschoben wird (Bild 6). Dabei sind die Drehung und die Verschiebung so zu wählen, dass das Ersatzelement das vermessene Funktionselement gemäß den Optimierungskriterien bestmöglich ausgleicht.

Die Drehung und Verschiebung werden im Parameter $a=[x,y;\phi]$ zusammengefasst. Für das LSE, LIE und MZE ergibt sich damit für die zu lösende Optimierungsaufgabe genau die gleiche Zielfunktion wie beim LSC, LIC bzw. MZC beschrieben.

Allerdings weichen die Zielfunktionen für das MCE und MIE erheblich von denen für den MCC bzw. MIC ab. Für das MCE (Minimum Circumscribed Element) ist gefordert, dass es sich von außen an die Messpunkte anschmiegt, d. h. alle lotrechten Abstände der Messpunkte zum Ersatzelement sind negativ. Es gilt deshalb

$$d_L \xrightarrow{!} 0 -$$

für die in positiver Richtung am weitesten vom Ersatzelement entfernt liegenden Messpunkte, woraus sich die Zielfunktion $Q(a)$

$$Q(a) = \max_i \frac{1}{d_{L,i}} \xrightarrow{!} \min_a$$

für die Optimierung ergibt. Dementsprechend ist für das MIE (Minimum Inscribed Element) in Analogie gefordert, dass es sich von innen an die Messpunkte anschmiegt, d. h. alle lotrechten Abstände der Messpunkte zum Ersatzelement sind positiv. Es gilt daher

$$d_L \xrightarrow{!} 0 +$$

Literatur zum Thema

- 1 Anthony, G. T.; Butler, B. P. et al.: Chebyshev Reference Software For The Evaluation Of Coordinate Measuring Machine Data. Commission of the European Communities, Report EUR 15304 EN; Teddington, UK: National Physical Laboratory, 1993
- 2 Denkena, B.; Reithmeier, E.; et al.: Sonderforschungsbereich 489 – Fortsetzungsantrag 2003-2004-2005 (hier A 5). Hannover: Universität Hannover, 2002; S. 219 – 274
- 3 DIN (Deutsches Institut für Normung): DIN 3960 – Begriffe und Bestimmungsgroßen für Stirnräder (Zylinderäder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung. Berlin: Beuth, 1987
- 4 Gander, W.; Golub, G. H.; Strebel, R.: Least-Squares Fitting of Circles and Ellipses. BIT 34 (1994), S. 558 – 578
- 5 Goch, G.; Haupt, M.: Modifizierte Tschebyscheff-Approximation von Kreisen. Technische Rundschau (1990) 41, S. 50 – 53
- 6 Günther, A.; Peter, J.; Goch, G.: Flächenhafte numerische Beschreibung, Ausrichtung und Auswertung von Zylinderrädern. tm – Technisches Messen 68 (2001) 4, S.160 – 165
- 7 Hadrich, M.: Ein Verfahren zur Tschebyscheff-Approximation von Formelementen der Koordinatenmesstechnik. Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden 40 (1991) 5/6, S. 51 – 56
- 8 Klein, M.: Einführung in die DIN-Normen. Berlin: Beuth, 2001, 13. Auflage; S. 208 – 213
- 9 Lotze, W.: Ausgleichskreis in der Koordinatenmeßtechnik. Feingerätetechnik 30 (1981) 12, S. 538 – 542
- 10 Wemme, F.: Zusammenstellung einer Bibliothek von Ausgleichsalgorithmen für Formelemente der rechnergestützten Koordinatenmesstechnik. Diplomarbeit; Dresden: Fertigungstechnik und Werkzeugmaschinen, 1985

für die in negativer Richtung am weitesten vom Ersatzelement entfernt liegenden Messpunkte, woraus sich die Zielfunktion $Q(a)$

$$Q(a) = \max_i \frac{-1}{d_{L,i}} \xrightarrow{!} \min_a$$

für die Optimierung ergibt. □